Esercizi di GEOMETRIA I - Algebra Lineare

1. Tra le seguenti matrici, eseguire tutti i prodotti possibili:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, calcolare $A \cdot A -^t A + I_3$.

3. Calcolare i determinanti e, quando possibile, le inverse delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Determinare quali tra i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali; di questi ultimi determinare una base.

$U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0\} \qquad U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=3\}$

$U_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x = y+1\}$

$U_4 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-z=0,\ t=3x\}$

$U_5 = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid det\, A = 0\}$

$U_6 = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a = 0\}$

5. Determinare la dimensione ed una base dei seguenti sottospazi vettoriali:
$U = L((1,0,1),(2,1,1),(-6,-2,-4))$
$W = L((3,0,1,1),(1,1,0,1),(2h,h+2,h,h+1))$ (al variare di $h \in \mathbb{R}$).

6. Determinare la dimensione ed una base per i sottospazi U, W, $U+W$ e $U \cap W$, nei seguenti casi:

(a) $U, W \subseteq \mathbb{R}^3$ $U = L((1,0,1),(2,1,1))$, $W = L((8,-3,5),(0,1,1),(3,-1,2))$.

(b) $U, W \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $U = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ / \ a+b+c=0,\ b+2c+d=0\}$,

$W = L(\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -2 & 11 \end{pmatrix})$.

7. Stabilire quali tra le seguenti applicazioni sono lineari; per queste ultime determinare la dimensione ed una base del nucleo e dell'immagine. Stabilire inoltre quali sono iniettive, quali suriettive e quali isomorfismi.

$f_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f_1(x,y,z,t) = (x-y, y+z, t)$

$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f_2(x,y,z) = (x+3y, y-4z-x)$ $\quad f_3 = f_2 \circ f_1$

$f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f_4(x,y) = (x+y, y, x)$

$f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ $\quad f_5(x,y) = (3x, x, 2x, 0)$

$f_6 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f_6(x,y,z) = (x+3, y)$

$f_7 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f_7(x,y,z) = (2x+y, z, x-y)$.

8. Per ciascuna delle seguenti applicazioni lineari determinare la matrice associata rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, dimensione ed una base dell'immagine e del nucleo:

(a) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $\quad f(x,y,z,t) = (x-y, y+z, t)$

$\mathcal{B} = ((2,-1,0,0),(-1,1,0,1),(0,1,0,0),(1,0,1,1))$
$\mathcal{B}' = ((1,1,1),(0,1,1),(1,-4,-3))$;

(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\quad g(x,y,z) = (x+3y, y-4z-x)$

$\mathcal{B} = ((1,1,1),(0,1,1),(1,-4,-3))$, $\mathcal{B}'$ = base canonica di $\mathbb{R}^2$;

(c) $h = g \circ f$, $\mathcal{B} = ((2,-1,0,0),(-1,1,0,1),(0,1,0,0),(1,0,1,1))$, $\mathcal{B}'$ = base canonica di $\mathbb{R}^2$;

(d) $f:\mathbb{R}^3[t]\to\mathbb{R}^2[t]$, $\quad f(at^3+bt^2+ct+d)=(a+c)t^2+(-2a+3b+c)t+(a-b+4d)$

$\mathcal{B}=(1,t,t^2,t^3)$, $\quad \mathcal{B}'=(1,t,t^2)$;

(e) $f:\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, $\quad f(A)=trA=a_1^1+a_2^2+a_3^3$, $\mathcal{B}$ la consueta base di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{B}'$ la base canonica di $\mathbb{R}$.

9. Data la famiglia di applicazioni lineari

$$f_\lambda:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4 \qquad f_\lambda(x,y,z)=(x-y+(1-\lambda)z,\lambda x+2y+\lambda z,2x,\lambda y+2z)$$

determinare la dimensione di $Im\, f_\lambda$ al variare di $\lambda\in\mathbb{R}$.

10. Data la famiglia di applicazioni lineari $f_\alpha:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ $f_\alpha(x,y,z,t)=(\alpha x,y-t,2x+\alpha z)$, determinare gli eventuali valori di α per i quali $dim\ Kerf_\alpha=2$. Per tali valori di α determinare una base per $Kerf_\alpha$ e per Imf_α.

11. Determinare gli eventuali valori di $\lambda\in\mathbb{R}$ per i quali l'applicazione lineare:

$$f_\lambda:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad f_\lambda(x,y,z)=(5x+2y,(\lambda-2)z,y-x)$$

è un isomorfismo. Per tali valori di λ determinare l'inversa di f_λ.

12. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e $f:V\to V$ una applicazione lineare. Sia $W=\{u\in V\ /\ f^2(u)=u\}$ (dove $f^2=f\circ f$).
Dimostrare che W è un sottospazio vettoriale di V.
Nel caso in cui $V=\mathbb{R}^3$ e $f(x,y,z)=(2x+y,x-z,z)$, trovare dimensione ed una base per W.

13. Determinare l'applicazione lineare $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ tale che $Kerf=L((1,0,1))$, $f((2,-1,3))=(-2,0,-1,-3)$, $\quad f((1,0,0))=(2,-3,1,1))$.
Dire se esistono una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ ed una base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sia la matrice $\begin{pmatrix}1&3&-1\\-1&0&-2\\0&2&-2\\2&1&0\end{pmatrix}$.

14. Sia $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che: $f(1,1,0,0)=(-2,4,-2,0)$, $\ f(0,0,0,1)=(2,-1,1,5)$, $\ f(2,0,1,0)=(2,1,1,0)$, $\ f(0,0,-1,0)=(-2,1,-3,0)$. Trovare l'immagine del vettore (2,3,-3,4).

15. Determinare l'applicazione lineare $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ che ha la matrice $\begin{pmatrix}5&-1&11\\0&2&-8\end{pmatrix}$ come matrice associata rispetto alle basi $\mathcal{B}=((1,1,1),(0,2,1),(2,-4,-3))$ di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}'=((1,1),(0,2))$ di $\mathbb{R}^2$.

16. Sia V^3 uno spazio vettoriale e $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ una sua base. Sia $T : V^3 \to V^3$ l'applicazione lineare tale che:

$$T(e_1 - 3e_3) = e_1 - 2e_2 - e_3, \quad T(e_1 + e_2 + e_3) = 3e_2 + 4e_3, \quad T(e_2 - e_3) = e_1$$

Determinare il valore del parametro reale k affinchè il vettore $v = (k+1)e_2 - 4(k^2 - 1)e_3$ appartenga al nucleo di T.

17. Si consideri il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$

$$U = L((1, h, 2, 0), (-1, 2, 0, h), (1 - h, h, 0, 2))$$

e se ne calcoli la dimensione al variare di $h \in \mathbb{R}$.
Posto $h = 2$, trovare l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$Ker f = U \ , \quad f((0, 0, 1, 1)) = (1, 1, 1, -1) \ , \quad f(1, 0, 1, 0) = (3, 1, 2, -2).$$

Dato il sottospazio $W = L((0, 1, 0, -1)(2, 0, 1, -3), (1, 0, 1, -3)) \subseteq \mathbb{R}^4$, trovare dimensioni e basi dei sottospazi W, $f(W)$, $W \cap f(W)$, $W + f(W)$.

18. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, sia $T_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare avente come matrice associata rispetto alle basi canoniche la matrice:

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & \lambda - 1 & \lambda - 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \lambda - 2 & 2(\lambda - 1) & 2\lambda - 1 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, basi e dimensioni dei sottospazi $Ker T_\lambda$ e $Im T_\lambda$.
Posto $\lambda = 2$, determinare l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ avente A_2 come matrice associata rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ ed alla base

$$\mathcal{B} = ((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, -1, 1), (0, 0, 0, -2))$$

di $\mathbb{R}^4$.

19. Risolvere, quando possibile, i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} 13x - 5y - 3z - t = 12 \\ 2x - y + t = 3 \\ 3x - y - z - t = 2 \\ 5x - 2y - z = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y + 5z - t = 1 \\ x + y - z - 2t = 2 \\ x - 4y + 6z + t = -1 \\ 4x + 6y + 10z - 2t = 2 \end{cases}$$

20. Discutere i seguenti sistemi lineari, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \lambda x+\lambda y+z+t=\lambda \\ x-\lambda y+z=3\lambda \\ 2x+2z+\lambda t=4 \\ (1-\lambda)x+2y+t=-2\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+y+z=1 \\ (1-\lambda)x-2y+z=1 \\ 2x+3y=\lambda \\ 4x-y+(2-\lambda)z=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} (1-\lambda)x+y+z+t=2 \\ x+\lambda y=2 \\ x+y+3z-t=4 \end{cases}$$

21. Discutere il seguente sistema lineare al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} kx+y+z+1=0 \\ y+z=0 \\ x+hz+k=0 \\ x-hy=0 \end{cases}$$

22. Data, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare

$$f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f_\alpha(x,y,z) = (3x+3y+3z, 3x+\alpha y+z, y+\alpha z)$$

trovare, se esistono, i valori di α per i quali il vettore $v_\alpha = (\alpha, 0, 2)$ appartiene a Imf_α.

23. Data, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare

$$f_\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad f_\alpha(x,y,z,t) = (x+\alpha y-3z+4t, 2x-y+2z-2t, 3x+y-z+\alpha t, 4x+3y-4z+6t)$$

trovare, se esistono, i valori di α per i quali il vettore $v_\alpha = (-1,4,3,2)$ appartiene a Imf_α.

24. Trovare un sistema lineare minimo che rappresenti i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = L((0,1,1,0),(0,1,-1,0)), \qquad W = L((1,2,3,0),(1,1,0,0)).$$

Lo stesso per $U+W$ e $U \cap W$.

25. Si determinino, se esistono, i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per i quali esiste una base $\mathcal{B}_k$ di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale sia diagonale la matrice associata all'endomorfismo T_k di $\mathbb{R}^4$ definito da:

$$T_k(x,y,z,t) = (3x+y+z, 4x+3y+2z, z, 2x+ky+3z+5t)$$

Per tali valori del parametro trovare $\mathcal{B}_k$.

26. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, trovare una matrice regolare E tale che $E^{-1}AE$ sia diagonale.

Determinare, se esistono, i valori dei parametri $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice $B = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & c & d \end{pmatrix}$ è simile ad A.

27. Trovare, se esistono, i valori dei parametri per i quali risultano simili le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ a & 0 & b \\ 5 & 1 & c \end{pmatrix}$$

.

28. Stabilire, motivando la risposta, se esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice associata all'endomorfismo $f(x, y, z) = (2x + y, x - z, z)$ sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

22. Data, per ogni $k \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f_k(x, y, z) = ((1 - k)x + z, y + (1 - k)z, y)$, determinare i valori di k per i quali il vettore $(1, k, 0)$ è un autovettore di f_k; per tali valori di k discutere la diagonalizzabilità di f_k, determinando, se esiste, una base spettrale.

23. Si determini, se esiste, l'endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ che ammette $v_1 = (1, 1, -1)$ e $v_2 = (1, 2, -1)$ come autovettori relativi agli autovalori 7 e -3 rispettivamente e tale che $T(1, 0, 0) = (2, -10, 5)$.

Soluzioni degli esercizi di Geometria I - Algebra Lineare

es. 3 $det\, A = 7$; $det\, B = 0$; $det\, C = -14$; $det\, D = 330$;

es. 4 Una base di U_1 è $\{(1, -1)\}$;
U_2 e U_3 non sono sottospazi vettoriali;
una base di U_4 è $\{(1, 0, 1, 3), (0, 1, 1, 0)\}$;
U_5 non è un sottospazio vettoriale;
una base di U_6 è $\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$;

es. 5 $dim\, U = 2$;
$dim\, W = 3$ per $h \neq -1$; $dim\, W = 2$ per $h = -1$;

es. 6 (a) $dim\, U = 2$, $dim\, W = 2$, $dim\, (U + W) = 3$, $dim\, (U \cap W) = 1$, $U \cap W = L((1, 0, 1))$;
(b) $dim\, U = 2$, $dim\, W = 2$, $dim\, (U + W) = 3$, $dim\, (U \cap W) = 1$, $U \cap W = L(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix})$

es. 7 f_1 è suriettiva, $dim\, Ker\, f_1 = 1$, $Ker\, f_1 = L((1, 1, -1, 0))$.

f_2 è suriettiva, $dim\, Ker\, f_2 = 1$, $Ker\, f_2 = L((-3, 1, 1))$.
f_3 è suriettiva, $dim\, Ker\, f_3 = 2$, $Ker\, f_3 = L((-2, 1, 0, 1), (-3, 0, 1, 1))$.
$dim\, Im\, f_4 = 2$, f_4 è iniettiva, $Im\, f_4 = L((1, 0, 1), (1, 1, 0))$.
$dim\, Im\, f_5 = 1$, $dim\, Ker\, f_5 = 1$, $Im\, f_5 = L((3, 1, 2, 0))$, $Ker\, f_5 = L((0, 1))$.
f_6 non è lineare.
f_7 è un automorfismo.

es. 8 (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -11 \\ -4 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ -4 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

es. 9 per $\lambda \neq 2$, $dim\, Im\, f_\lambda = 3$; per $\lambda = 2$, $dim\, Im\, f_\lambda = 2$.

es. 10 $\alpha = 0$, $Ker\, f = L((0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0))$, $Im\, f = L((0, -1, 0), (0, 0, 2))$

es. 11 $\lambda \neq 2$, $f^{-1}(x, y, z) = (\frac{1}{7}\, x - \frac{2}{7}\, z, \frac{1}{7}\, x + \frac{5}{7}\, z, \frac{1}{\lambda - 2}\, y)$

es. 12 $W = L((1, -1, 2))$

es. 13 $f(x, y, z) = (2x - 2z, -3x + 3y + 3z, x - z, x + 2y - z)$; non esistono.

es. 14 $f(2, 3, -3, 4) = (-4, 10, -10, 20)$

es. 15 $f(x, y, z) = (5x - y + z, 2x + 3z)$

es. 16 $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $k = -1$.

es. 17 per $h = 2$, $dim\, U = 2$; per $h \neq 2$, $dim\, U = 3$;
$f(x, y, z, t) = (5x - \frac{y}{2} - 2z + 3t, x - \frac{y}{2} + t, 3x - \frac{y}{2} - z + 2t, -3x + \frac{y}{2} + z - 2t)$;
$dim\, W = 3$, $dim\, f(W) = 2$, $dim\, (W \cap f(W)) = 1$, $dim\, (W + f(W)) = 4$.

es. 18 per $\lambda \neq 2$ $dim\, Im\, T_\lambda = 3$; per $\lambda = 2$ $dim\, Im\, T_\lambda = 2$;
$f(x, y, z) = (y + z, y + z, -y - 2z, -y + 2z)$

es. 19

- Il sistema è possibile con ∞^2 soluzioni;

- Il sistema è possibile con ∞^1 soluzioni.

es. 20

- Per $\lambda \neq 0, 1$ il sistema è di Cramer, per $\lambda = 0$ è impossibile, per $\lambda = 1$ è possibile con ∞^2 soluzioni;
- per $\lambda \neq 0, 13$ il sistema è impossibile, per $\lambda = 0$ è possibile con ∞^1 soluzioni, per $\lambda = 13$ ha una soluzione;
- per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ il sistema è possibile con ∞^1 soluzioni.

es. 21 Il sistema impossibile per ogni $h, k \in \mathbb{R}$.

es. 22 $v_\alpha \in Im\, f_\alpha$ per ogni $\alpha \neq 1$.

es. 23 $v_\alpha \in Im\, f_\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

es. 24 una base di $U \cap W$ è $\{(0, 1, 3, 0)\}$.

es. 25 $k = -1$, $\mathcal{B}_k = ((1, 0, -2, 1), (0, 1, -1, 1), (1, 2, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$.

es. 26 $E = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $a = -1$, $b = 0$, $c = 4$, $d = -1$.

es. 27 Non esistono.

es. 28 No, perchè f è un automorfismo e $det\, A = 0$.

es. 29 $k = 0$; la matrice è diagonalizzabile;
una base spettrale è $((2, 2, \sqrt{5} - 1), (2, 2, -1 - \sqrt{5}), (1, 0, 0))$.

es. 30 $T(x, y, z) = (2x - 10y - 15z, -10x - 13y - 30z, 5x + 10y + 22z)$.